



TITLE:

# 気泡流中の弱非線形波動 (非線形波動現象の数理と応用)

AUTHOR(S):

金川, 哲也; 矢野, 猛; 渡部, 正夫; 藤川, 重雄

---

CITATION:

金川, 哲也 ...[et al]. 気泡流中の弱非線形波動 (非線形波動現象の数理と応用). 数理解析研究所講究録 2010, 1701: 40-46

ISSUE DATE:

2010-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/169993>

RIGHT:

## 気泡流中の弱非線形波動

北海道大学 大学院工学研究科<sup>1</sup> 金川 哲也 (Tetsuya KANAGAWA)  
大阪大学 大学院工学研究科<sup>2</sup> 矢野 猛 (Takeru YANO)  
北海道大学 大学院工学研究科<sup>1</sup> 渡部 正夫 (Masao WATANABE)  
北海道大学 大学院工学研究科<sup>1</sup> 藤川 重雄 (Shigeo FUJIKAWA)

<sup>1</sup> Graduate School of Engineering, Hokkaido University

<sup>2</sup> Graduate School of Engineering, Osaka University

### 1 はじめに

気泡を含む液体中においては、単相媒質中に比べ、圧力波のふるまいが著しく異なる。その特徴のひとつに、気泡振動によって誘起される波の分散性が挙げられる。弱非線形のレジームにおいては、van Wijngaarden による Korteweg-de Vries (KdV) 方程式の導出 [1] を皮切りに、これまで多くの研究がなされてきた (たとえば, [2, 3])。

本稿では、物理パラメータのスケールリング、すなわち波の代表的な伝播速度、波長、周期の適切なオーダー評価を起点とした、気泡流中における異なる種類の弱非線形波動の統一的な取り扱いを可能にする理論を提示する。

著者らのグループが提出した 2 流体モデルに基づく気泡流の支配方程式 [4, 5]、および、多重尺度法を用いた漸近解析をおこなう。その結果、図 1 に示すように、低周波数領域が KdV-Burgers 方程式で、比較的高周波数領域が非線形 Schrödinger (NLS) 方程式で、それぞれ記述される。

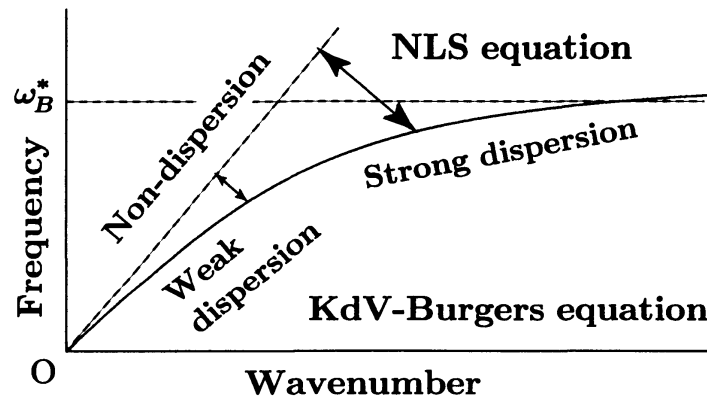


Fig. 1: Weakly nonlinear propagation of pressure waves in two frequency bands: the low frequency band and moderately high frequency band are governed by the KdV-Burgers and NLS equations, respectively. Here  $\omega_B^*$  denotes the eigenfrequency of a single bubble.

## 2 問題設定および基礎方程式

多数の微細気泡を一様に含む静止液体中における、有限振幅の1次元進行波(平面波)問題に取り組む。従来の多くの研究で無視されてきた(たとえば, [1, 2]) 液体の圧縮性を考慮するが, 簡単のため, 気体の粘性, 気体と液体の熱伝導性, 気液界面を通しての相変化およびエネルギー輸送, さらに Reynolds 応力を無視する。

### 2.1 基礎方程式系

気泡流の支配方程式系は, 気相と液相それぞれに対する質量および運動量の保存則, 気泡壁の運動方程式, また, 状態方程式などから構成される [4, 5]. まず, 2流体モデルに基づく質量および運動量の保存則は, 以下のように与えられる (“\*” は有次元量を意味する):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha \rho_G^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\alpha \rho_G^* u_G^*) = 0, & (1) \\ \frac{\partial}{\partial t^*}[(1-\alpha)\rho_L^*] + \frac{\partial}{\partial x^*}[(1-\alpha)\rho_L^* u_L^*] = 0, & (2) \\ \frac{\partial}{\partial t^*}(\alpha \rho_G^* u_G^*) + \frac{\partial}{\partial x^*}(\alpha \rho_G^* u_G^{*2}) + \alpha \frac{\partial p_G^*}{\partial x^*} = F^*, & (3) \\ \frac{\partial}{\partial t^*}[(1-\alpha)\rho_L^* u_L^*] + \frac{\partial}{\partial x^*}[(1-\alpha)\rho_L^* u_L^{*2}] + (1-\alpha) \frac{\partial p_L^*}{\partial x^*} + P^* \frac{\partial \alpha}{\partial x^*} = -F^*. & (4) \end{cases}$$

ここに,  $t^*$  は時間,  $x^*$  は空間座標,  $\alpha$  はボイド率(気相の体積分率),  $\rho^*$  は密度,  $u^*$  は流速,  $p^*$  は圧力であり, 添え字  $G$  および  $L$  はそれぞれ気相および液相に付随する体積平均化された変数を意味する。なお, 体積平均圧力  $p_G^*$  と  $p_L^*$  に加え, 気液界面における面積積分によって定義された局所的な液体圧力  $P^*$  が導入されている。相関の運動量輸送項  $F^*$  としては, 以下の付加慣性力のモデルを用いる [5, 6]:

$$F^* = -\beta_1 \alpha \rho_L^* \left( \frac{D_G u_G^*}{Dt^*} - \frac{D_L u_L^*}{Dt^*} \right) - \beta_2 \rho_L^* (u_G^* - u_L^*) \frac{D_G \alpha}{Dt^*} - \beta_3 \alpha (u_G^* - u_L^*) \frac{D_G \rho_L^*}{Dt^*}. \quad (5)$$

ここに, 付加慣性係数  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は球形気泡の場合  $1/2$  とおかれるが, 本稿では具体的な値を与えぬまま進める。また,  $D_G/Dt^*$  と  $D_L/Dt^*$  は以下のように定義される:

$$\frac{D_G}{Dt^*} \equiv \frac{\partial}{\partial t^*} + u_G^* \frac{\partial}{\partial x^*}, \quad \frac{D_L}{Dt^*} \equiv \frac{\partial}{\partial t^*} + u_L^* \frac{\partial}{\partial x^*}.$$

圧縮性液体中における気泡の膨張・収縮運動をあらわす方程式として, Keller 方程式を用いる [7]:

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) R^* \frac{D_G^2 R^*}{Dt^{*2}} + \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{3c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) \left( \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right)^2 \\ & = \left( 1 + \frac{1}{c_{L0}^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*} \right) \frac{P^*}{\rho_{L0}^*} + \frac{R^*}{\rho_{L0}^* c_{L0}^*} \frac{D_G}{Dt^*} (p_L^* + P^*). \end{aligned} \quad (6)$$

ここに,  $R^*$  は平均化された気泡半径である。右辺第2項は, 気泡振動にともなう周囲液体への音波の放射に基づく気泡振動の減衰項である。

方程式系 (1)–(6) は, 以下に示す, 気相のポリトロプ変化の関係式, 液相の Tait 状態方程式, 気泡内気体の質量保存則, 気液界面における法線方向応力のつりあい式によって閉じられる:

$$\begin{cases} \frac{p_G^*}{p_{G0}^*} = \left( \frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} \right)^\gamma, & p_L^* = p_{L0}^* + \frac{\rho_{L0}^* c_{L0}^{*2}}{n} \left[ \left( \frac{\rho_L^*}{\rho_{L0}^*} \right)^n - 1 \right], \\ \frac{\rho_G^*}{\rho_{G0}^*} = \left( \frac{R_0^*}{R^*} \right)^3, & p_G^* - (p_L^* + P^*) = \frac{2\sigma^*}{R^*} + \frac{4\mu^*}{R^*} \frac{D_G R^*}{Dt^*}. \end{cases} \quad (7)$$

ここに,  $\gamma$  はポリトロプ指数,  $n$  は物質定数,  $\sigma^*$  は表面張力,  $\mu^*$  は液体の粘性係数である.

添え字 0 が付いた量は初期静止状態における値であり, すべて定数であることを注意しておく.

## 2.2 多重尺度法による解析

現象を特徴付ける代表的な時間  $T^*$  と長さ  $L^*$  を用いて, 時間  $t^*$  と空間座標  $x^*$  を,  $t = t^*/T^*$ ,  $x = x^*/L^*$  と無次元化する.

小さなパラメータとして, 波の代表的な無次元振幅  $\epsilon (\ll 1)$  を用いて, 独立変数  $t$  および  $x$  に対する複数のスケール

$$t_m = \epsilon^m t, \quad x_m = \epsilon^m x, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (8)$$

を導入する [8]. これよりただちに, 偏微分演算子が展開される:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{m=0}^N \epsilon^m \frac{\partial}{\partial t_m}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{m=0}^N \epsilon^m \frac{\partial}{\partial x_m}. \quad (9)$$

従属変数として, まず,  $\alpha$ ,  $u_G^*$ ,  $u_L^*$ ,  $R^*$ ,  $p_L^*$  を  $\epsilon$  のべき級数に展開する:

$$\alpha/\alpha_0 = 1 + \epsilon \alpha_1 + \epsilon^2 \alpha_2 + \dots, \quad (10)$$

$$u_G^*/U^* = \epsilon u_{G1} + \epsilon^2 u_{G2} + \dots, \quad (11)$$

$$u_L^*/U^* = \epsilon u_{L1} + \epsilon^2 u_{L2} + \dots, \quad (12)$$

$$R^*/R_0^* = 1 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + \dots, \quad (13)$$

$$p_L^* = p_{L0}^* + \epsilon \rho_{L0}^* U^{*2} p_{L1} + \epsilon^2 \rho_{L0}^* U^{*2} p_{L2} + \dots. \quad (14)$$

ここで,  $U^* (\equiv L^*/T^*)$  は代表的な波の伝播速度である.

つづいて, 液相密度  $\rho_L^*$  の展開を以下のように定める:

$$\rho_L^*/\rho_{L0}^* = \begin{cases} 1 + \epsilon^2 \rho_{L1} + \epsilon^3 \rho_{L2} + \dots, \\ 1 + \epsilon^5 \rho_{L1} + \epsilon^6 \rho_{L2} + \dots. \end{cases} \quad (15)$$

すなわち,  $\rho_L^*/\rho_{L0}^*$  の変動は他変数 (10)–(14) よりも小さいと仮定しており, 1 行目が KdV–Burgers 方程式 (3 節), 2 行目が NLS 方程式 (4 節) の導出においてそれぞれ用いられる. なお,  $p_L^*$  と  $\rho_L^*$  は先述の Tait 式を満足せねばならず, それゆえ, これらの摂動も Tait 式によって関係づけられる. その具体形, たとえば  $p_{L1}$  と  $\rho_{L1}$  の間に存在する陽な関係は, 後の解析においてあらわれる.

初期状態における, 気相および液相の圧力ならびに密度比を

$$p_{G0} \equiv \frac{p_{G0}^*}{\rho_{L0}^* U^{*2}} \equiv O(1), \quad p_{L0} \equiv \frac{p_{L0}^*}{\rho_{L0}^* U^{*2}} \equiv O(1), \quad \rho_0 \equiv \frac{\rho_{G0}^*}{\rho_{L0}^*} \equiv O(\epsilon^3), \quad (16)$$

と定義する. 本解析において,  $\rho_0$  の寄与はないことを述べておく.

最後に, 単一気泡の固有角振動数  $\omega_B^*$  の定義を与える:

$$\omega_B^* \equiv \sqrt{\frac{3\gamma(p_{L0}^* + 2\sigma^*/R_0^*) - 2\sigma^*/R_0^*}{\rho_{L0}^* R_0^{*2}}}. \quad (17)$$

### 3 Korteweg-de Vries–Burgers 方程式

まず, 長波長および低周波数領域に着目し, KdV–Burgers 方程式を導くための物理パラメータのスケーリングを  $\epsilon (\ll 1)$  を用いて, 以下のように設定する:

$$\frac{U^*}{c_{L0}^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv V\sqrt{\epsilon}, \quad \frac{R_0^*}{L^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv \Delta\sqrt{\epsilon}, \quad \frac{\omega^*}{\omega_B^*} \equiv O(\sqrt{\epsilon}) \equiv \Omega\sqrt{\epsilon}. \quad (18)$$

ここに,  $V, \Delta, \Omega$  はすべて  $O(1)$  の定数であり,  $\omega^* \equiv 1/T^*$  は音源の角振動数をあらわす. スケーリング (18) は, 代表的な波の位相速度が初期液単相音速にくらべて  $O(\sqrt{\epsilon})$  だけ小さく, 代表的な長さが初期気泡径にくらべて  $O(1/\sqrt{\epsilon})$  だけ大きく, さらに, 入射波の振動数が気泡の固有振動数にくらべて  $O(\sqrt{\epsilon})$  だけ小さいことを意味する.

基礎方程式系 (1)–(4) と (6) に対応する,  $\epsilon$  に対する最低次の方程式は, 以下の線形方程式系である:

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - 3\frac{\partial R_1}{\partial t_0} + \frac{\partial u_{G1}}{\partial x_0} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t_0} - (1 - \alpha_0) \frac{\partial u_{L1}}{\partial x_0} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \beta_1 \frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0} - \beta_1 \frac{\partial u_{L1}}{\partial t_0} - 3\gamma p_{G0} \frac{\partial R_1}{\partial x_0} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} (1 - \alpha_0 + \beta_1 \alpha_0) \frac{\partial u_{L1}}{\partial t_0} - \beta_1 \alpha_0 \frac{\partial u_{G1}}{\partial t_0} + (1 - \alpha_0) \frac{\partial p_{L1}}{\partial x_0} = 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} R_1 + \frac{\Omega^2}{\Delta^2} p_{L1} = 0. \end{cases} \quad (23)$$

同様に  $O(\epsilon^2)$  の方程式系も得る. これらは, それぞれ, 無次元気泡径の第 1 近似解  $R_1$  および第 2 近似解  $R_2$  を未知変数とする単一方程式にまとめることができる:

$$O(\epsilon): \quad \frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - v_p^2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} = 0, \quad (24)$$

$$O(\epsilon^2): \quad \frac{\partial^2 R_2}{\partial t_0^2} - v_p^2 \frac{\partial^2 R_2}{\partial x_0^2} = K(t_0, t_1, x_0, x_1). \quad (25)$$

ここに, 位相速度  $v_p$  は

$$v_p = \sqrt{\frac{3\alpha_0(1 - \alpha_0 + \beta_1)\gamma p_{G0} + \beta_1(1 - \alpha_0)\Delta^2/\Omega^2}{3\beta_1\alpha_0(1 - \alpha_0)}}, \quad (26)$$

で与えられ、以後、 $v_p \equiv 1$  となるように代表速度  $U^*$  を定める。

式 (24) と (25) において、右向き進行波のみに着目する。非同次方程式 (25) に対する可解条件

$$K(\varphi_0, t_1, x_1) = 0, \quad (\varphi_0 \equiv x_0 - t_0), \quad (27)$$

を用い、いくつかの操作を経て、KdV-Burgers 方程式が導かれる：

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \Pi_1 f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \Pi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \Pi_3 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} = 0. \quad (28a)$$

ここに、以下のような変数変換をおこなった：

$$\tau \equiv \epsilon t, \quad \xi \equiv x - (1 + \epsilon \Pi_0)t. \quad (28b)$$

さらに、係数  $\Pi_0, \Pi_2, \Pi_3$  は以下のように与えられる：

$$\Pi_0 = -\frac{(1 - \alpha_0)\Delta^2 V^2}{6\alpha_0 \Omega^2}, \quad \Pi_2 = -\frac{1}{6\alpha_0} \left( 4\mu + \frac{\Delta^3 V}{\Omega^2} \right), \quad \Pi_3 = \frac{\Delta^2}{6\alpha_0}. \quad (29)$$

散逸係数  $\Pi_2$  は負値、分散係数  $\Pi_3$  は正值である。また、非線形係数  $\Pi_1$  は負値であるが、その陽な形は複雑ゆえ省略する。

式 (24) より、 $t_0$  と  $x_0$  で特徴付けられる近傍場においては、圧力波は線形波動方程式にしたがう。いっぽう、式 (25) より、 $O(1/\epsilon)$  の時間空間スケールの遠方場においては、弱い分散性、弱い非線形性および弱い散逸性の発現・競合によって、減衰をともなうソリトンが形成される。

## 4 非線形 Schrödinger 方程式

つづいて、前節に比較して高周波数および短波長領域を記述する以下のスケーリングを起点として、NLS 方程式の導出をおこなう：

$$\frac{U^*}{c_{L0}^*} \equiv O(\epsilon^2) \equiv V\epsilon^2, \quad \frac{R_0^*}{L^*} \equiv O(1) \equiv \Delta, \quad \frac{\omega^*}{\omega_B^*} \equiv O(1) \equiv \Omega. \quad (30)$$

ここで、代表的な時間を  $T^* \equiv 1/\omega_B^*$  と定めた。代表的な位相速度は前節よりも小さく設定されており、初期気泡径は代表的な長さと同程度 (短波)、さらに気泡の固有振動数と入射波の振動数が同程度であることを規定している。

まず、 $O(\epsilon)$  の方程式系のうち、質量および運動量保存則の形は式 (19)–(22) と同じであるが、式 (23) に対応する線形 Keller 方程式は

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} + R_1 + \frac{p_{L1}}{\Delta^2} = 0, \quad (31)$$

となり、時間に関する 2 階導関数、すなわち分散項を含む。それゆえ、式 (24) に対応する  $R_1$  についての線形方程式には 4 階導関数がふくまれる：

$$\mathcal{L}_1[R_1] \equiv \frac{\partial^2 R_1}{\partial t_0^2} - \left[ \frac{\Delta^2}{3\alpha_0} + \frac{(1 - \alpha_0 + \beta_1)\gamma p_{G0}}{\beta_1(1 - \alpha_0)} \right] \frac{\partial^2 R_1}{\partial x_0^2} - \frac{\Delta^2}{3\alpha_0} \frac{\partial^4 R_1}{\partial x_0^2 \partial t_0^2} = 0. \quad (32)$$

したがって、前節とは異なり、スケーリング (30) のもとでは近傍場において分散性の効果があらわれる。

式 (32) の解として、以下のような準単色波列を仮定する：

$$R_1 = A(t_1, \dots; x_1, \dots) e^{i\theta} + \text{c.c.}, \quad \theta = kx_0 - \Omega(k)t_0. \quad (33)$$

ここに、 $A$  は複素振幅、 $k \equiv k^* L^*$  は無次元波数である。すなわち、搬送波  $e^{i\theta}$  のゆっくりとした変化が、包絡波  $A$  によって記述される。

第 1 近似  $R_1$  が非自明な解を持たねばならないことから、以下の線形分散関係式を得る：

$$D(k, \Omega) \equiv \frac{\Delta^2 k^2 (1 - \Omega^2)}{3\alpha_0} + \frac{(1 - \alpha_0 + \beta_1) \gamma p G_0}{\beta_1 (1 - \alpha_0)} k^2 - \Omega^2 = 0. \quad (34)$$

3 次までの計算をすすめると、 $O(\epsilon)$  の方程式 (32) に対応する以下の方程式が得られる：

$$O(\epsilon^2): \quad \mathcal{L}_1[R_2] = \Gamma_1 e^{2i\theta} + \Gamma_2 e^{i\theta} + \text{c.c.}, \quad (35)$$

$$O(\epsilon^3): \quad \mathcal{L}_1[R_3] = \Lambda_1 e^{3i\theta} + \Lambda_2 e^{2i\theta} + \Lambda_3 e^{i\theta} + \text{c.c.} \quad (36)$$

ここに、 $\Gamma_i$  と  $\Lambda_i$  は、 $A$  およびその導関数から構成される複素変数である (陽な形は省略する)。これらの右辺において、可解条件より、 $e^{i\theta}$  の係数がゼロとならねばならない [8]。したがって、

$$\Gamma_2 = 0 \implies \frac{\partial A}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0, \quad (37)$$

$$\Lambda_3 = 0 \implies i \left( \frac{\partial A}{\partial t_2} + v_g \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) + \frac{q}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \nu_1 |A|^2 A + i\nu_2 A = 0, \quad (38)$$

および、これらの複素共役を得る。

式 (37) と (38) から、以下の NLS 方程式を得る：

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{q}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \nu_1 |A|^2 A + i\nu_2 A = 0. \quad (39a)$$

ただし、以下の変数変換を用いた：

$$\tau \equiv \epsilon^2 t, \quad \xi \equiv \epsilon(x - v_g t). \quad (39b)$$

ここに、群速度  $v_g$  およびその波数による導関数  $q$  は、分散関係式 (34) から

$$v_g = \frac{d\Omega}{dk} = \frac{3\alpha_0 \Omega}{k(3\alpha_0 + \Delta^2 k^2)} \geq 0, \quad q \equiv \frac{dv_g}{dk} = -\frac{9\alpha_0 \Delta^2 \Omega}{(3\alpha_0 + \Delta^2 k^2)^2} \leq 0, \quad (40)$$

と計算され、散逸係数  $\nu_2$  は以下のように与えられる：

$$\nu_2(k) = \frac{(4\mu + \Delta^3 V)k^2}{2(3\alpha_0 + \Delta^2 k^2)} \geq 0. \quad (41)$$

また、非線形係数  $\nu_1$  は負値であり、その陽な表式は省略する。

NLS 方程式 (39) は、 $O(1/\epsilon^2)$  の時間空間スケールにおける、群速度の導関数に比例する分散性、振幅の 3 次の非線形性、また液体粘性および気泡からの音響放射による散逸性、これらの釣り合いによって定まる包絡波の発展を記述する。

## 5 おわりに

気泡を含む静止液体中の弱非線形波動を多重尺度法を用いて調べた。代表的な物理パラメータのスケーリングを起点として、気泡流の支配方程式から、2種類の波動方程式、すなわち、低周波数領域を記述する KdV–Burgers 方程式、比較的高周波数領域を記述する非線形 Schrödinger 方程式を導いた。

今後、よりさまざまなモード、よりさまざまな周波数領域に着目した解析を行い、気泡流中の非線形波動の統一的な理解を目指す。

## 参考文献

- [1] L. van Wijngaarden. On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles. *J. Fluid Mech.*, 33:465–474, 1968.
- [2] L. van Wijngaarden. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 4:369–394, 1972.
- [3] N. A. Gumerov. Quasi-monochromatic weakly non-linear waves in a low dispersion bubble medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 56:50–59, 1992.
- [4] R. Egashira, T. Yano, and S. Fujikawa. Linear wave propagation of fast and slow modes in mixtures of liquid and gas bubbles. *Fluid Dyn. Res.*, 34:317–334, 2004.
- [5] T. Yano, R. Egashira, and S. Fujikawa. Linear analysis of dispersive waves in bubbly flows based on averaged equations. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 75:104401–01–08, 2006.
- [6] I. Eames and J. C. R. Hunt. Forces on bodies moving unsteadily in rapidly compressed flows. *J. Fluid Mech.*, 505:349–364, 2004.
- [7] J. B. Keller and I. I. Kolodner. Damping of underwater explosion bubble oscillations. *J. Appl. Phys.*, 27:1152–1161, 1956.
- [8] A. Jeffrey and T. Kawahara. Asymptotic methods in nonlinear wave theory. Pitman, 1982.